SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA

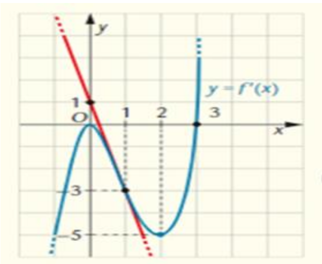
DELL’ESAME DI STATO PER IL LICEO SCIENTIFICO OSA.

Anno scolastico 2023-2024

Risolvi 1 dei 2 problemi e 4 degli 8 quesiti in cui si articola il questionario.

Problema 1

In figura è tracciato il grafico della funzione derivata di una funzione y=f(x), derivabile due volte in R. La retta è tangente al grafico di y=f ‘(x) nel punto di ascissa 1.



- Qual è, per la funzione f(x), la natura dei punti x=0, x=2 e x=3?
- Quanti sono i punti del grafico di f(x) in cui la tangente è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante? Quanti i punti in cui la tangente è parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante?
- Scegli, tra le seguenti diseguaglianze, quella corretta, motivando adeguatamente la tua risposta:

  $f(0)<f(3)<f(2)<f(1)$ 3. $f(0)>f(1)>f(2)>f(3)$

  $f(0)>f(3)>f(1)>f(2)$ 4. $f(0)<f(1)<f(2)<f(3)$

- Traccia un grafico qualitativo della funzione y= f ‘’(x)

Supponi ora che sia f(0)=5 e f(2)=3.

- Scrivi l’equazione della retta tangente al grafico di f(x) nel punto di ascissa 2.
- Stabilisci a quali dei seguenti limiti è possibile applicare il teorema di De l’Hopital, dandone esauriente spiegazione. In ogni caso, calcola i limiti.

$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)+3}{x-1}$ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x^2}$

Problema 2

Tra le funzioni di equazione $y = ax^3 \; + bx^2 + cx + d$ individua:

- l'equazione della funzione y=f(x), dispari, avente un punto di estremo relativo di coordinate (1,2);
- l'equazione della funzione y=g(x), il cui grafico è tangente nell'origine alla retta di equazione y=3x e passa per i punti di coordinate (-1,0) e (1,8);

Risolvi quindi i seguenti quesiti:

- traccia i grafici delle due funzioni f e g ;
- verifica che i grafici di f e g sono tangenti nell'origine e determina le coordinate del loro ulteriore punto di intersezione A;
- scrivi le equazioni delle rette tangenti alle due curve in A;
- determina l'area del triangolo individuato dalle rette tangenti alle due cubiche in O e in A.

Quesiti

1. Considera la parabola φ con asse verticale, avente vertice in V(-2,0) e passante per il punto A(0,4).

- Scrivi l'equazione di φ.
- Scrivi l'equazione della parabola φ', simmetrica di φ rispetto all'asse y, indicando con V' il vertice di φ'
- Condotta una retta y=t, che interseca l'arco AV in P e l'arco AV' in Q, indica con P' e Q', rispettivamente, le proiezioni di P e Q sull'asse x. Determina l'equazione della retta in modo che sia massima l'area del rettangolo PQQ'P'

2. Data la funzione $y = (\ln x)^2 - \ln x$ determina:

- il massimo valore di a per cui la funzione è invertibile nell'intervallo [1, a];
- il valore di a per cui la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [1,a];
- il massimo valore di a per cui la funzione è convessa nell'intervallo [1, a].

3. Dopo aver individuato un intervallo cui appartiene la soluzione dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$, determina una sua approssimazione con una cifra decimale esatta.

4. Supponiamo che f sia una funzione derivabile in R, tale che f(0) =3 e f'(x) ≤ 2 per ogni x ∈ R. Applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo [0,4], dimostra che f(4) ≤ 11.

   Dimostra quindi che, più in generale, risulta f(x)≤ 3+2x per ogni x ∈ R.

5. Stabilisci il numero degli asintoti verticali della funzione $y = \frac{1}{x(lnx-3)+1}$

6. Determiniamo, se esistono, i valori di *a* e *b* per cui la funzione:

$$y = \begin{cases} a + \sqrt{3x^2 + 1} & x \leq 1 \\ b \ln x + x & x > 1 \end{cases}$$

   è derivabile in R.

7. Individua a quale delle seguenti funzioni è applicabile il teorema di Weierstrass nell'intervallo [-2, 2], giustificando adeguatamente la risposta:
   a. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
   b. $f(x) = \frac{1}{e^x - 2}$
   c. $f(x) = \frac{1}{2+\sin x}$
   d. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 2}$

Sai individuare, per questa funzione, i valori di cui il teorema garantisce l'esistenza?

8. Considera il grafico in figura.
   a. Supposto che esso sia il grafico della funzione y=f(x), individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.
   b. Supposto che esso sia il grafico della funzione y= f '(x), individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e i più ampi intervalli aperti in cui f è convessa.
   c. Supposto infine che esso sia il grafico della funzione y= f ''(x), individua, se esistono, i punti di flesso della funzione f e il più ampio intervallo aperto in cui f è convessa.